412. 組合函數方程式ニ就イテ(II)

(所謂 Vektor-Raum ノ一ツノ Charakterisierung ニツイテ)

北川 敏男(阪大)

§1. B-Verknüpf. 並ビニ $\overset{*}{\text{B}}$-Verknüpf. ノ導入

ニツノ集合 $\mathfrak{M}$ ト $\mathfrak{K}$ トガアリ、$\mathfrak{M}$ ノ元ヲ ξ, $\mathfrak{K}$ ノ元ヲ α デ表ハストキ $\{\xi_n\}$, $\{\alpha_n\}$ $(n=1,2,3,\cdots\cdots)$ ナル Folgen ニ對シテ

$$\begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots\cdots & \xi_n & \cdots\cdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots\cdots & \alpha_n & \cdots\cdots \end{bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ハ又 $\mathfrak{M}$ ノ一意ニ決ツタ元ヲ表ハシ, 次ノ諸性質ヲモツテキルトスル。

(I) $\mathfrak{M}$ ニハ一定ノ元 Θ ガアツテ (1) ニ現ハレル ξ_n ノウチ, Θ ト一致シナイモノハ高々有限個デアル。

(II) $\xi_n = \Theta$ デアレバ, $\{\xi_k\}$ $(k \neq n)$[1], $\{\alpha_k\}$, 並ビニ α'_n ヲ如何ニトルトモ常ニ

$$\begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots\cdots & \xi_{n-1} & \Theta & \xi_{n+1} & \cdots\cdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots\cdots & \alpha_{n-1} & \alpha_n & \alpha_{n+1} & \cdots\cdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots\cdots & \xi_{n-1} & \Theta & \xi_{n+1} & \cdots\cdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots\cdots & \alpha_{n-1} & \alpha'_n & \alpha_{n+1} & \cdots\cdots \end{bmatrix} \cdots\cdots (2)$$

ナル関係ガ成立スル。

---

(1) $\{\xi_k\}$ $(k \neq n)$ ノ意味ハ ξ_n ヲ除イテハ, 知ラレテキルトイフ意味デアル。

(III) 任意ノ $\{\zeta_k\}$ $(k \neq n)$ 並ニ $\{\alpha_k\}$ ニ對シテ

$$\begin{bmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 \cdots\cdots \zeta_{n-1} & \zeta_n & \zeta_{n+1} \cdots\cdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 \cdots\cdots \alpha_{n-1} & 0 & \alpha_{n+1} \cdots\cdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 \cdots\cdots \zeta_{n-1} & \Theta & \zeta_{n+1} \cdots\cdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 \cdots\cdots \alpha_{n-1} & \alpha_n & \alpha_{n+1} \cdots\cdots \end{bmatrix} \cdots\cdots (3)$$

トナル如キ $\mathfrak{R}$ ノ元ガ一ツ而シテ唯一ツ存在スル。コレヲ 0 デ表ハス。

(IV) 任意ノ $\{\zeta_n\}$ ニ對シテ

$$\begin{bmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 \cdots\cdots \zeta_n \cdots\cdots \\ 0 & 0 \cdots\cdots 0 \cdots\cdots \end{bmatrix} = \Theta \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

(V) $\zeta_n \neq \Theta$ ナラバ, ζ, $\{\zeta_k\}$ $(k \neq n)$ 及ビ $\{\alpha_k\}$ $(k \neq n)$ ヲ如何ニ與フルトモ

$$\begin{bmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 \cdots\cdots \zeta_{n-1} & \zeta_n & \zeta_{n+1} \cdots\cdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 \cdots\cdots \alpha_{n-1} & \alpha_n & \alpha_{n+1} \cdots\cdots \end{bmatrix} = \zeta \cdots\cdots (5)$$

トナル如キ α ハ一ツ而シテ唯一ツ存在スル。

(VI) $\alpha_n \neq 0$ ナラバ, ζ, $\{\zeta_k\}$ $(k \neq n)$ 及ビ $\{\alpha_k\}$ $(k \neq n)$ ヲ如何ニ與フルトモ

$$\begin{bmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 \cdots\cdots \zeta_{n-1} & \zeta_n & \zeta_{n+1} \cdots\cdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 \cdots\cdots \alpha_{n-1} & \alpha_n & \alpha_{n+1} \cdots\cdots \end{bmatrix} = \zeta \cdots\cdots (6)$$

ナル如キ ζ_n ハ一ツ而シテ唯一ツ存在スル。

(VII) 任意ノ *Folge* $\{\zeta_n\}$ ニ對シテ

$$\begin{bmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 \cdots\cdots \zeta_{n-1} & \zeta_n & \zeta_{n+1} \cdots\cdots \\ 0 & 0 \cdots\cdots 0 & e & 0 \cdots\cdots \end{bmatrix} = \zeta_n \cdots\cdots (7)$$

ナル如キ元 e ガ存在スル。

以上ノ諸性質ヲ有スルトキ (1) ヲ B-*Verknüpfung* ト稱シ $B(\mathfrak{M},\mathfrak{K})$ デ表ハス。[1] 特ニ

(VIII) $\mathfrak{M}=\mathfrak{K},\quad \Theta=0$

且ツ

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \cdots\cdots 0 & e & 0 \cdots\cdots \\ \beta_1 & \beta_2 \cdots\cdots \beta_{n-1} & \beta_n & \beta_{n+1} \cdots\cdots \end{bmatrix} = \beta_n \quad\cdots\cdots (8)$$

ナル元 e ガ存在スル。

コノ條件ガ加ルトキ (1) ヲ B^*-*Verknüpfung* トイヒ, $B^*(\mathfrak{M})$ デ示ス。而シテ *runde Klammer* ヲ用ヰルコトニスル。

假定(I), $n>m$ ナルトキ, 常ニ $\xi_n=\Theta$ ナル如キ m ガアリ、ソノトキ假定(II)ニヨリ, $\alpha_n\ (n>m)$ ニハ實質上無關係ニナルカラ、(1) ヲ

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 \cdots\cdots \xi_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 \cdots\cdots \alpha_n \end{pmatrix}_n \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

デ表ハスコトニシヨウ。

§2. *Mischungregel.*

$B(\mathfrak{M},\mathfrak{K})$ ガ次ノ性質ヲモツトスル。[2]

---

(1) 以下ノ議論ガ正シケレバ, *Mischregel* (§2) ノ假定ノ下ニ於イテハ, (1) ハ言ハバ *Bilinear Form* (?) ノヤウナモノデアルト言ヒ得ヤウ。ソコデ頭文字ノ B ヲトツテ、假リニ斯ク名付ケルコトニシタ。

(2) ξ ガ $\mathfrak{M}$ ノ任意ノ元, α,β ガ $\mathfrak{K}$ ノ任意ノ元ニ對シテ成立スルトイフ意味デアル。

$$
(\mathrm{M})\quad \left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}\zeta_1 & \zeta_2 \cdots\cdots & \zeta_n \\ \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2}\cdots\cdots & \alpha_{1,n}\end{bmatrix}_n & \begin{bmatrix}\zeta_1 & \zeta_2 \cdots\cdots & \zeta_n \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,1}\cdots\cdots & \alpha_{2,n}\end{bmatrix}_n & \cdots\cdots & \begin{bmatrix}\zeta_1 & \zeta_2 \cdots\cdots & \zeta_n \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2}\cdots\cdots & \alpha_{n,n}\end{bmatrix}_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots\cdots & \beta_n\end{matrix}\right]_n
$$

$$
= \left[\begin{matrix}\zeta_1 & \zeta_2 & \cdots\cdots & \zeta_n \\ \begin{pmatrix}\alpha_{1,1} & \alpha_{2,1}\cdots\cdots & \alpha_{n,1} \\ \beta_1 & \beta_2 \cdots\cdots & \beta_n\end{pmatrix}_n & \begin{pmatrix}\alpha_{2,1} \cdots\cdots & \alpha_{2,n} \\ \beta_1 \cdots\cdots & \beta_n\end{pmatrix}_n & \cdots\cdots & \begin{pmatrix}\alpha_{n,1} \cdots\cdots & \alpha_{n,n} \\ \beta_1 \cdots\cdots & \beta_n\end{pmatrix}_n\end{matrix}\right]_n
$$

コレヲ Mischregel ト称スル。

定理 I. Mischungregel ヲ有スル B($\mathfrak{M}$, $\mathfrak{K}$), B*($\mathfrak{K}$)ニ對シテ次ノ事實ガ成リ立ツ。

1°. B*(K)ニ於イテハ，（Multiplikation）Folge $(\alpha\beta)_i$ $(i=1,2,\cdots\cdots)$ 並ビニ（Addtion）$\alpha+\beta$ ナル Composition ガ定義サレテ

$$
\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 \cdots\cdots & \alpha_n \cdots\cdots \\ \beta_1 & \beta_2 \cdots\cdots & \beta_n \cdots\cdots\end{pmatrix}
$$

$$
=(\alpha_1\beta_1)_1+(\alpha_2\beta_2)_2+\cdots\cdots+(\alpha_n\beta_n)_n+\cdots\cdots \quad (11)
$$

トシテ表ハサレル。コヽニ、之レ等ノ Composition ハ次ノ如キ性質ヲモツ

(i) Composition $(\alpha,\beta)i$ ニ関シテ 0 ヲ除イタ $\mathfrak{M}$ ハ一ツ群ヲツクル。e ガソノ Einheit デアル。

(ii) 任意ノ i, j ニ對シテ

$$
((\alpha,\beta)_i\,\gamma)_j = (\alpha\,(\beta\gamma)_j)_i \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (12)
$$

(iii) $\mathfrak{K}$ ハ Composition $\alpha+\beta$ ニ関シテ一ツノ kommutative gruppe ヲツクル。

0 ガソノ Einheit ニナル。

(iv) $$((\alpha+\beta)\gamma)_j = (\alpha\gamma)_j + (\beta\gamma)_j \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (13)$$

$$(\gamma(\alpha+\beta))_j = (\gamma\alpha)_j + (\gamma\beta)_j \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (14)$$

2. $B(\mathfrak{M}, \mathfrak{K})$ ニ對シテハ

$\mathfrak{K}$ ノ任意ノ Element α ト $\mathfrak{M}$ ノ任意ノ Element ξ トノ間ニ、Operation $(\alpha\cdot\xi)_i$ ガ定義サレ $\mathfrak{M}$ ノ元ヲ表ハシ又 $\mathfrak{M}$ ノ元同志ノ間ニ Composition $\xi_1 \oplus \xi_2$ ガ定義サレテ

$$\begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 \cdots\cdots \xi_n \cdots\cdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 \cdots\cdots \alpha_n \cdots\cdots \end{bmatrix}$$

$$= (\alpha_1\cdot\xi_1)_1 \oplus (\alpha_2\cdot\xi_2)_2 \oplus \cdots\cdots \oplus (\alpha_n\cdot\xi_n) \oplus \cdots\cdots (15)$$

トシテ表ハサレル。コヽニ、之レ等ノ Operation 乃至 Composition ニハ次ノ如キ性質ガアル。

(v) $$(e\cdot\xi)_n = \xi \qquad (16)$$

(vi) $$(\alpha\cdot\Theta)_n = \Theta \qquad (17)$$

(vii) $$(0\cdot\xi)_n = \Theta \qquad (18)$$

(viii) Composition $\xi_1 \oplus \xi_2$ ニ關シテ $\mathfrak{M}$ ハ一ツノ群ヲ表ハス。

(ix) $$\xi_k = \sum_\nu (\alpha_{k,\nu}\cdot\xi^\circ_\nu)_\nu \qquad (k=1,2,3,\cdots\cdots)$$

ナルトキニハ

$$\begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 \cdots\cdots \xi_n \cdots\cdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 \cdots\cdots \alpha_n \cdots\cdots \end{bmatrix} = \sum_k \Big(\sum_\nu (\alpha_{\nu,k}\alpha_\nu)_\nu \cdot \xi^\circ_k \Big)_k^{(1)} \cdots\cdots (19)$$

---

(1) $\sum$ ハ $\mathfrak{K}$ ニ於ケル Addition $\alpha+\beta$ ノ Summe; $\sum$ ハ $\mathfrak{M}$ ニ於ケル Addition $\xi\oplus k$ ノ Summe ナリトスル。

§2. 定理Iノ証明.

補助定理I. *Mischungregel* ガ成立スルトキニハ, $B^{*}(\mathfrak{K})$ - *Verknüpfung* ニ對シテモ *Mischregel* ガ成立スル。

証明. 簡單ノタメ $n=2$ ノ場合ニツイテ述ベル。

$$\left[\begin{matrix} \left[\begin{matrix} \begin{bmatrix}\xi_1 & \xi_2\\ \alpha_1 & \alpha_2\end{bmatrix}_2 & \begin{bmatrix}\xi_1 & \xi_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{bmatrix}_2 \\ \delta_1 & \delta_2\end{matrix}\right]_2 & \left[\begin{matrix} \begin{bmatrix}\xi_1 & \xi_2\\ \alpha_1 & \alpha_2\end{bmatrix}_2 & \begin{bmatrix}\xi_1 & \xi_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{bmatrix}_2 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2\end{matrix}\right]_2 \\ g_1 & g_2 \end{matrix}\right]_2 \quad \cdots\cdots (20)$$

$$= \mathfrak{S} \ (say)$$

ヲ考ヘル。コレハ, $B(\mathfrak{M}, \mathfrak{K})$ ニ關スル *Mischregel* ニヨリ.

$$\left[\begin{matrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \left(\begin{matrix} \begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \delta_1 & \delta_2\end{pmatrix}_2 & \begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2\end{pmatrix}_2 \\ g_1 & g_2\end{matrix}\right)_2 & \left(\begin{matrix} \begin{pmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \delta_1 & \delta_2\end{pmatrix}_2 & \begin{pmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2\end{pmatrix}_2 \\ g_1 & g_2\end{matrix}\right)_2 \end{matrix}\right]_2 \quad \cdots\cdots (21)$$

ニ等シク, 又

$$\left[\begin{matrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \left(\begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \begin{pmatrix}\delta_1 & \varepsilon_1\\ g_1 & g_2\end{pmatrix}_2 & \begin{pmatrix}\delta_2 & \varepsilon_2\\ g_1 & g_2\end{pmatrix}_2 \end{matrix}\right)_2 & \left(\begin{matrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \begin{pmatrix}\delta_1 & \varepsilon_1\\ g_1 & g_2\end{pmatrix}_2 & \begin{pmatrix}\delta_2 & \varepsilon_2\\ g_1 & g_2\end{pmatrix}_2 \end{matrix}\right)_2 \end{matrix}\right]_2 \quad \cdots\cdots (22)$$

ニモ等シイ。

茲デ ξ_1, ξ_2 ハ任意デアルカラ、(∇) ニヨリ、

$$\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \delta_1 & \delta_2\end{pmatrix}_2 & \begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2\end{pmatrix}_2\\ g_1 & g_2\end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \begin{pmatrix}\delta_1 & \varepsilon_1\\ g_1 & g_2\end{pmatrix}_2 & \begin{pmatrix}\delta_2 & \varepsilon_2\\ g_1 & g_2\end{pmatrix}_2\end{pmatrix}_2 \cdots\cdots (23)$$

ヲ得ル。コレ求ムル $B^*(\mathfrak{K})$ ニ関スル Mischregel デアル。[(1)]

吾々ハ便宜上，次ノ記号ヲ導入スル。

$$\begin{bmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n\\ e & e & \cdots & e\end{bmatrix}_n = \xi_1 \oplus \xi_2 \oplus \cdots \oplus \xi_n \cdots\cdots (24)$$

$$\begin{bmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_k & \cdots & \xi_n\\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_k & \cdots & 0\end{bmatrix}_n = (\alpha_k \cdot \xi_k)_k \cdots\cdots (25)$$

然ルトキ

補助定理 II.

$$\begin{bmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_k & \cdots & \xi_n\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_k & \cdots & \alpha_n\end{bmatrix}_n = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cdot \xi_k)_k \cdots\cdots (26)$$

証明． 簡単ノタメニ $n=2$ トシテオク。

$$\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1 & \xi_2\\ \alpha_1 & 0\end{bmatrix}_2 & \begin{bmatrix}\xi_1 & \xi_2\\ 0 & \alpha_2\end{bmatrix}_2\\ e & e\end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix}\xi_1 & \xi_2\\ \begin{pmatrix}\alpha_1 & 0\\ e & e\end{pmatrix}_2 & \begin{pmatrix}0 & \alpha_2\\ e & e\end{pmatrix}_2\end{bmatrix}_2$$

コレ即チ

$$(\alpha_1 \cdot \xi_1)_1 \oplus (\alpha_2 \cdot \xi_2)_2 = \begin{bmatrix}\xi_1 & \xi_2\\ \alpha_1 & \alpha_2\end{bmatrix}_2$$

---

(1) 前稿、組合函数方程式ニ就テ (I) (混合体ノ函数方程式ニツイテ) ニ於イテ、$F(X, Y, \alpha)$ ノ函数方程式カラ、$A(x, y, \alpha)$ ノ函数方程式ヲ導キ出ストキ，コノ方法ニハ依ラナカッタが、コノ方法デモ全ク同様ニシテ出来ル。

ヲ示ス。アトハ Induktion ヲ施セバヨロシイ。

補助定理 III.

$$(\xi_1 \oplus \xi_2) \oplus \xi_3 = \xi_1 \oplus (\xi_2 \oplus \xi_3) \text{ ---------------- } (27)$$

証明. 定義ニヨリ

$$(\xi_1 \oplus \xi_2) \oplus \xi_3 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ e & e & 0 \end{bmatrix}_3 & \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix}_3 & \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_3 \\ e & e & 0 \end{bmatrix}_3$$

$$\xi_1 \oplus (\xi_2 \oplus \xi_3) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ e & 0 & 0 \end{bmatrix}_3 & \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ 0 & e & e \end{bmatrix}_3 & \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_3 \\ e & e & \varepsilon \end{bmatrix}_3$$

然ルニ Mischregel ニヨリ、コノ二ツハ共ニ

$$\begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ e & e & e \end{bmatrix}_3$$

ニ外ナラナイ。

又、次ノ補助定理ヲウル:

補助定理 IV. $\mathfrak{M}_{\varepsilon}$ ハ Composition $\xi_1 \oplus \xi_2$ ニ関シテ $\mathfrak{O}$ ヲ Einheit ニシテ gruppe ヲツクル。

以上ノ準備ノモトニ，定理 I ノ証明ニ移ル。上述ノ結果ニヨリ、吾々ハ $B^*(\mathfrak{K})$ ノ Mischregel ヲ研究スレバ充分デアル。$n=2$ ノ場合ヲ考ヘヤウ。乃チ

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}_2 & \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix}_2 & \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix}_2 \end{pmatrix}_2$$

ナルトシヤウ。以下

$$\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ \gamma & 0\end{pmatrix}=(\alpha\,\gamma)_1\,,\quad \begin{pmatrix}0 & \beta\\ 0 & \delta\end{pmatrix}=(\beta\,\delta)_2 \quad\cdots\cdots\cdots (28)$$

ナル Notation ヲ用キル。δ_2, α_2, β_1, β_2, 並ビニ $\gamma_2=0$ トオクコトニ由リ

$$((\delta_1\ \alpha_1)_1\ \gamma_1)_1=(\delta_1\ (\alpha_1\ \gamma_1)_1)_1 \quad\cdots\cdots\cdots (29)$$

ヲ得ル。明カニ

$$(e\,\alpha)_1=(\alpha\,e)_1=\alpha \quad\cdots\cdots\cdots (30)$$

依ッテ O ヲノゾイテ $\mathfrak{K}$ ハ Composition $(\alpha\,\gamma)_1$ ニ関シテ群ヲツクルコトガワカル。$(\alpha\,\beta)_2$ ニ関シテモ同様デアル。

又 $\beta_1=\beta_2=\gamma_2=0$ トオキテ

$$\left(\begin{pmatrix}\delta_1 & \delta_2\\ \alpha_1 & \alpha_2\end{pmatrix}_2 \gamma_1\right)_1=\begin{pmatrix}\delta_1 & \delta_2\\ (\alpha_1\ \gamma_1)_1 & (\alpha_2\ \gamma_1)_1\end{pmatrix}_2 \quad\cdots\cdots\cdots (31)$$

同様ニシテ

$$\left(\delta_1 \begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{pmatrix}_2\right)_1=\begin{pmatrix}(\delta_1\ \alpha_1)_1 & (\delta_1\ \beta_1)_1\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{pmatrix}_2 \quad\cdots\cdots\cdots (32)$$

ヲ得ル。$(\alpha\,\beta)_2$ ニ関シテモ同様ノ性質ガアル。

次ニ，$\delta_1=\gamma_1$, $\delta_2=\gamma_2$ トオクトキニハ，$\mathfrak{K}$ ニ於ケル Mischregel ハ

$$\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_1 & \gamma_2\\ \alpha_1 & \alpha_2\end{pmatrix}_2 & \begin{pmatrix}\gamma_1 & \gamma_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{pmatrix}_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{pmatrix}_2=\begin{pmatrix}\gamma_1 & \gamma_2\\ \begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{pmatrix}_2 & \begin{pmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{pmatrix}_2\end{pmatrix}_2 \quad\cdots\cdots\cdots (33)$$

以下便宜上，γ_1, γ_2 ヲ Fixieren シタトシテ

$$\begin{pmatrix}\gamma_1 & \gamma_2\\ \alpha_1 & \alpha_2\end{pmatrix}_2=\langle\alpha_1,\ \alpha_2\rangle_2 \quad\cdots\cdots\cdots (34)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix}_2 = (\alpha_1,\ \alpha_2)_2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (35)$$

トスレバ

$$\langle (\alpha_1, \alpha_2)_2,\ (\beta_1, \beta_2)_2 \rangle_2 = (\langle \alpha_1, \beta_1 \rangle_2,\ \langle \alpha_2, \beta_2 \rangle_2)_2 \quad \cdots\cdots (36)$$

$$(\alpha,\ 0)_2 = \sigma(\alpha), \quad (0,\ \beta)_2 = \tau(\alpha) \quad \cdots\cdots (37)$$

トオケバ

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2)_2 = \sigma(\alpha_1) + \sigma(\alpha_2)$$

$$= (\alpha_1 \gamma_1)_1 + (\alpha_2 \gamma_2)_2 \quad \cdots\cdots (38)$$

コヽニ、$\alpha + \beta$ ハ kommutative gruppe ヲツクリ，0 ガ Einheit ヲナス。(1)

コノ結果ヲ以ッテ $B^*(\mathfrak{K})$ ノ Mischregel ヲ書キ改メルトキニハ

$$\Big(\big((\delta_1 \alpha_1)_1 + (\delta_2 \alpha_2)_2\big)\gamma_1\Big)_1 + \Big(\big((\delta_1 \beta_1)_1 + (\delta_2 \beta_2)_2\big)\gamma_2\Big)_2$$
$$= \Big(\delta_1 \big((\alpha_1 \gamma_1)_1 + (\beta_1 \gamma_2)_2\big)\Big)_1 + \Big(\delta_2 \big((\alpha_2 \gamma_1)_1 + (\beta_1 \gamma_2)_2\big)\Big)_2$$

$\gamma_2 = 0$ トシテ

$$\Big(\big((\delta_1 \alpha_1)_1 + (\delta_2 \alpha_2)_2\big)\gamma_1\Big)_1 = \big(\delta_1 (\alpha_1 \gamma_1)_1\big)_1 + \big(\delta_2 (\alpha_2 \gamma_1)_1\big)_2$$

更ニ $\delta_1 = 0$ トシテ

$$\big((\delta_2 \alpha_2)_2 \gamma_1\big)_1 = \big(\delta_2 (\alpha_2 \gamma_1)_1\big)_2$$

従ッテ前式ハ

$$\Big(\big((\delta_1 \alpha_1)_1 + (\delta_2 \alpha_2)_2\big)\gamma_1\Big)_1 = \big((\delta_1 \alpha_1)_1 \gamma_1\big)_1 + \big((\delta_2 \alpha_2)_2 \gamma_1\big)_1$$

---

(1) (36) カラ (38) マデヲ導クノニハ、多少ノ工夫ヲ要スルガ今ソレヲ省略シテオク。

$(\delta_1\ \alpha_1)_1$, $(\delta_2\ \alpha_2)_2$ ヲ夫々 α, β トスレバ

$$((\alpha+\beta)\gamma_1)_1 = (\alpha\ \gamma_1)_1 + (\beta\ \gamma_1)_2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (40)$$

$(\alpha\beta)_1$, $(\alpha\beta)_2$, $\alpha+\beta$ ニ関スル残リノ諸性質ハ同様ニシテ証明サレル。

$n=2$ ノ場合、定理Iハ証明サレタ。$n>2$ ニツイテハ簡単ナ Induction デ証明サレル。

§3. Vektor-Raum ノ Charakterisierung.

以上ノ結果ヲ利用シテ Mischregel ヲ有スル $B(\mathfrak{M}, \mathfrak{K})$ ニ更ニ、條件ヲ附加スルコトニヨリ、Vektor-Raum ヲ特徴付ヲ試ミヤウ。先ヅ次ノ Symmetrie ノ性質ヲ導入スル：

$$(S) \quad \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 \cdots\cdots \xi_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 \cdots\cdots \alpha_n \end{bmatrix}_n = \begin{bmatrix} \xi_{m_1} & \xi_{m_2} \cdots\cdots \xi_{m_n} \\ \alpha_{m_1} & \alpha_{m_2} \cdots\cdots \alpha_{m_n} \end{bmatrix}_n \quad \cdots\cdots\cdots (41)$$

コヽニ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \cdots\cdots n \\ m_1 & m_2 \cdots\cdots m_n \end{pmatrix}$ ハ $(1, 2, \cdots\cdots, n)$ ノ任意ノ Permutation

然ルトキ次ノ定理ガ成リ立ツ。

定理II. (S) ト Mischregel トヲ有スル $B(\mathfrak{M}, \mathfrak{K})$ ニ関シテハ，

(i) $\xi_1 \oplus \xi_2 = \xi_2 \oplus \xi_1$

(ii) $(\alpha \cdot \xi)_i = (\alpha \cdot \xi)_j$ （任意ノ i ト j トニ對シテ）

(iii) $(\alpha\beta)_i = (\alpha\beta)_j$ （〃 〃 〃）

(iv) $\mathfrak{K}$ ハ一ツノ Körper ヲツクリ $B^*(\mathfrak{K})$ ハ次ノ如ク表ハサレル。

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \cdots\cdots \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 \cdots\cdots \beta_n \end{pmatrix}_n = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots\cdots + \alpha_n\beta_n \cdots\cdots\cdots\cdots (42)$$

コノデ(iii)ニヨリ *Multiplikation* ヲ *Suffix* ヲトッテ、示スコトニシテキル。

証明. (i), (ii) ハ, 定理IトSトカラ直チニ得ラレル。(iii) 從ッテ (iv) ヲミルニハ、B($\mathfrak{M}$, $\mathfrak{K}$) ニ関シテ(S)ガアレバ *Mischregel* ニヨリ、B*($\mathfrak{K}$) ニ對シテモ (S) ガナリタツ事ニ着目スレバヨロシイ。

次ニ、他ノ條件ヲ導入スル. コレヲ *Kommutativät* ノ條件トイフ。

$$(\mathrm{K}) \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \cdots\cdots \alpha_n \cdots\cdots \\ \beta_1 & \beta_2 \cdots\cdots \beta_n \cdots\cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \cdots\cdots \beta_n \cdots\cdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 \cdots\cdots \alpha_n \cdots\cdots \end{pmatrix} \cdots\cdots (43)$$

ガ任意ノ $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ ニ関シテ成立スル。

定理III. (S), (K) 並ビニ *Mischregel* ヲ有スルトキニハ, 定理IIノ結果ニ加フルニ, $\mathfrak{K}$ ガ *Kommutativ* ナ *Körper* デアルトイフコトヲ得ル。

以上ハ全ク *Kombinatorisch* ナ性質ニシカ訴ヘナカッタガ、コヽニ至ッテ始メテ *Topologisch* ナ性質ヲ導入シヤウ。

$\mathfrak{K}$ ニ関スル *Topologie* ノ假定(T): $\mathfrak{K}$ ハ *lokal kompakt*, *zusammenhängend* ニシテ *erste Abzählbarkeitsaxiom* ト *Hausdorff* ノ *Trennbarkeitsaxiom* ガ充タサレテキル *Topologischer Raum* トスル。

$B^*(\mathfrak{K})$ =関スル Stetigkeit ノ假定 (S_t): $B^*(\mathfrak{K})$ =於イテ

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \cdots\cdots \alpha_n \cdots\cdots \\ \beta_1 & \beta_2 \cdots\cdots \beta_n \cdots\cdots \end{pmatrix} = \gamma$$

ハ各 Parameter =関シテ überall Stetig デアリ、更= γ ト左辺ノ $\{\alpha_k\}$ 並ビ= $\{\beta_k\}$ ($k \neq n$) ヲ與ヘルトキ, $\alpha_n \neq 0$ ナラバ, stetig =解ケル。γ, $\{\alpha_k\}$ ($k \neq n$) 並ビ= $\{\beta_k\}$ ヲ與ヘテ上ノ関係ヲ満足スル α_n ヲモトメルトキ $\beta_n \neq 0$ ナラバ同様 stetig =解ケル。

然ルトキ Pontrjagin(1) ノ結果ヲ用キテ次ノ結論=至ル。

定理 IV. Mischungregel ヲ有スル B($\mathfrak{M}$; $\mathfrak{K}$) が更= (S), (T), (S_t) ナル性質ヲ有スレバ, ソレハ Koeffizienten körper ヲ実数体, 複素数体, 四元数体トスル Vektor-Raum =ナル。

定理 V. Mischungregel ヲ有スル B($\mathfrak{M}$, $\mathfrak{K}$) が更=、(S), (T), (S_t) 並ビ=(K) ヲ有スレバ, Koeff. Körper ヲ実数体又ハ複素数体トスル Vektor-Raum =ナル(2)。

以上ノ諸定理 I — V ノ逆ノ成立スルコトハ容易=分ル。

---

(1) Pontrjagin: Über stetige Algebraische Körper. Ann. of Math. II. S. 33 (163—174) (1932)

尚、Pontragin ノ結果ノ應用トシテ次ノ論文ヲ参照セラレタシ。

Kolmogoroff: Zur Begründung der projektiven Geometrie. Ann. of Math. II. S. 33 (175—176) (1932)

定理IV或ハ定理V並ビニソレ等ノ逆ニヨリ、吾々ハ所謂Vektor-RaumノCharakterisierungガ出来タト言ヒ得ルウ。[2]――Vektor-Raumノ定義ヲ換ヘテオカナイト意味ヲナサナイガ、今ハ，考ヘノ筋道ヲ述ベルノガ主眼ダカラ、事新シク諸條件ヲ列挙スルコトヲヤメヨウ。又、係数ヲ四元数ニマデ拡張シタBanach空間論ガ何處マデ進メラレルカ多少ノ興味ガ殘ッテキル――。